Изпит ВПС - Първа част

**код - 25WY**

**ЗАДАЧИ:**

**Въпрос 1.**

По случаен начин избираме цифра измежду цифрите на твоето ЕГН (2). Нека събитията A=четна цифра и B=нечетна цифра. Независими ли са двете събития A и B? Защо (не се признава интуитивно доказателство)

**Въпрос 2.**

Кои от следните числа -2, 0, 0.5, 0.7, 1, 2 може да са дисперсия на сл.в. Х? Защо?

**Въпрос 3.**

Може ли дискретна случайна величина да има безброй много стойности? Защо?

**Въпрос 4.**

Кои от следните числа -1, -0.5, 0, 0.5 и 10 могат да са стойности на функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина и защо?

**Въпрос 5.**

Дискретна случайна величина X приема стойности само стойности 1, 2, 3, 4. Колко е P(X=1) ?

**Въпрос 6.**

Сл.в. X е нормално разпределена със средната стойност на 10 и стандартно отклонение 4.. Колко % от стойностите на X са по-големи от 10 ?

**Задача 1.**

На пазар продавач има рози, от тях 10 + A са бели и 10 са червени, където A е 0. Иванчо купува букет от три рози, за да подари на Марийка.

А) Да се намери вероятността на събитието Марийка да е получила само една бяла роза;

Б) Да се намери вероятността на събитието Марийка да е получила само две рози с еднакъв цвят;

В) Да се намери вероятността на събитието Марийка да е получила поне две бели рози

Г) Нека X = брой бели рози в букета. Кои са стойностите на X?

Д) Нека X = брой бели рози в букета. Да се напише разпределението на X ?

Е) Нека X = брой бели рози в букета. Да се намерят F(-1.5), F(0.5), F(1.2), F(3.7) където F(x) е функцията на разпределението на X ?  
 Ж) Да се намерят вероятностите P(X<0), P(X=0), P(X>1), където случайната величина X е дефинирана в т.д.

**РЕШЕНИЕ:**

**Въпрос 1.**

Двете събития A (четна цифра) и B (нечетна цифра) не са независими. Решението се базира на математическата дефиниция на независими събития.

Ако A и B са независими, тогава вероятността на тяхното съвместно настъпване, P(A ∩ B), трябва да бъде равна на произведението на техните индивидуални вероятности, P(A) \* P(B).

В нашия случай, P(A) = 1/10 и P(B) = 1/2. Ако приложим формулата за независими събития, получаваме:

P(A ∩ B) = P(A) \* P(B)

P(A ∩ B) = (1/10) \* (1/2)

P(A ∩ B) = 1/20

Въпреки това, наблюдаваме, че P(A ∩ B) = 0, тъй като не съществува число, което е едновременно четно и нечетно. Така че 0 ≠ 1/20.

Следователно, заключаваме, че A и B не са независими.

**Въпрос 2.**

Единственото число от предоставените, което може да бъде дисперсия на случайна величина Х, е числото 2. Останалите числа -2, 0, 0.5, 0.7 и 1 - не могат да бъдат дисперсия, тъй като дисперсията трябва да е неотрицателно число, а тези числа не отговарят на това условие.

**Въпрос 3.**

Дискретната случайна величина не може да има безброй много стойности. Дискретните случайни величини са дефинирани да приемат само определен брой различни стойности. Тези стойности са изброими и могат да бъдат свързани с цели числа или крайни множества. За да има безброй много стойности, трябва да разглеждаме непрекъснати случайни величини, които могат да приемат стойности в интервали или изброяеми безкрайни множества. Така че, дискретната случайна величина не може да има безброй много стойности.

**Въпрос 4.**

От предоставените числа, -1, -0.5, 0, 0.5 и 10, всички могат да бъдат стойности на функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина. Това е възможно, тъй като непрекъснатите случайни величини могат да приемат стойности в интервали.

Функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина дефинира вероятността да приеме стойност по-малка или равна на дадена точка в интервала на възможни стойности.

В случая:

За -1:

Функцията на разпределение може да има вероятност P(X ≤ -1) > 0.

За -0.5:

Функцията на разпределение може да има вероятност P(X ≤ -0.5) > 0.

За 0:

Функцията на разпределение може да има вероятност P(X ≤ 0) > 0.

За 0.5:

Функцията на разпределение може да има вероятност P(X ≤ 0.5) > 0.

За 10:

Функцията на разпределение може да има вероятност P(X ≤ 10) > 0.

Така че всички предоставени числа могат да бъдат стойности на функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина.

**Въпрос 5.**  
Ако дискретна случайна величина X приема само стойности 1, 2, 3 и 4, за да определим вероятността P(X=1), трябва да разделим броят на случаите, когато X приема стойност 1, на общия брой възможни случаи.

Тъй като X може да приема само стойности 1, 2, 3 и 4, общият брой на възможните случаи е 4. Ако предположим, че вероятностите са равномерно разпределени, което е най-често предположение за дискретни равномерни случайни величини, всеки от възможните резултати има еднаква вероятност.

Следователно, P(X=1) = брой на случаите, когато X=1 / общ брой на възможните случаи = 1 / 4 = 0.25 или 25%.

Така че вероятността P(X=1) е 0.25 или 25%.

**Въпрос 6.**

Понеже X е нормално разпределена случайна величина със средна стойност 10 и стандартно отклонение 4, можем да използваме таблица за стандартизирано нормално разпределение, за да определим процента на стойностите, които са по-големи от 10.

За да използваме таблицата, трябва да стандартизираме стойността 10 като я превърнем в z-стойност. За да направим това, използваме формулата на стандартизация:

z = (X - μ) / σ

където X е стойността на интереса, μ е средната стойност на разпределението, а σ е стандартното отклонение.

Замествайки стойностите, получаваме:

z = (10 - 10) / 4 = 0 / 4 = 0

Тъй като z-стойността ни е 0, търсим площта под кривата на стандартизираното нормално разпределение вдясно на 0.

От таблицата за стандартизирано нормално разпределение можем да видим, че площта вдясно на 0 е 0.5000 или 50%.

Следователно, 50% от стойностите на X са по-големи от 10.

Така че 50% от стойностите на X са по-големи от 10.

**Задача 1.**

**А)**

За да намерим вероятността на събитието Марийка да е получила само една бяла роза, трябва да определим броят на благоприятните изходи и ги разделим на общия брой на изходите.

Общият брой на изходите е комбинация от 3 рози, избрани от общия брой налични рози, което е 20 (10 бели + 10 червени).

Благоприятните изходи са ситуациите, в които Марийка получава само една бяла роза. Това може да се постигне, ако изберем една бяла роза от 10-те налични и две червени рози от 10-те налични. Броят на благоприятните изходи е 10 \* 10 = 100 (тъй като имаме 10 възможности за избор на бяла роза и 10 възможности за избор на две червени рози).

Следователно, вероятността на събитието Марийка да е получила само една бяла роза е 100 / 20C3 = 100 / 1140 ≈ 0.0877 или около 8.77%.

*"20C3" представлява комбинация от 20 елемента, взети по 3 елемента едновременно. В общия случай, "nCr" (или "n choose r") представлява биномен коефициент и се изчислява по формулата:*

*nCr = n! / (r! \* (n-r)!)*

**Б)**

За да намерим вероятността на събитието Марийка да е получила само две рози с еднакъв цвят, трябва да определим броят на благоприятните изходи и ги разделим на общия брой на изходите.

Общият брой на изходите е същият като в предишната задача - 20C3 = 1140.

Благоприятните изходи включват случаите, в които Марийка получава две бели рози и една червена роза, или две червени рози и една бяла роза. За две бели и една червена роза имаме 10 \* 10 \* 10 = 1000 благоприятни изхода (10 възможности за избор на първата бяла роза, 10 възможности за избор на втората бяла роза и 10 възможности за избор на червената роза). За две червени и една бяла роза също имаме 1000 благоприятни изхода.

Общият брой на благоприятните изходи е 1000 + 1000 = 2000.

Следователно, вероятността на събитието Марийка да е получила само две рози с еднакъв цвят е 2000 / 1140 ≈ 1.7544 или около 17.54%.

**В)**

За да намерим вероятността на събитието Марийка да е получила поне две бели рози, можем да изчислим вероятността на обратното събитие - че Марийка е получила най-много една бяла роза, и след това да го извадим от 1.

Вероятността на Марийка да е получила най-много една бяла роза включва случаите, когато тя е получила 0 или 1 бяла роза.

За да намерим вероятността на Марийка да е получила 0 бели рози, трябва да определим броят на благоприятните изходи, в които тя избира само червени рози. Това е 10C3 = 120 (10 възможности за избор на всяка червена роза).

За да намерим вероятността на Марийка да е получила 1 бяла роза, трябва да определим броят на благоприятните изходи, в които тя избира точно една бяла роза и две червени рози. Това е 10 \* 10C2 = 10 \* 45 = 450 (10 възможности за избор на бяла роза и 45 възможности за избор на две червени рози).

Общият брой на благоприятните изходи за най-много една бяла роза е 120 + 450 = 570.

Следователно, вероятността на събитието Марийка да е получила поне две бели рози е 1 - (570 / 1140) = 1 - 0.5 = 0.5 или 50%.

**Г)**

Случайната величина X, дефинирана като броят на белите рози в букета, може да приема следните стойности: 0, 1, 2 и 3.

**Д)**

За да напишем разпределението на X, трябва да определим вероятностите за всяка стойност на X.

P(X = 0) - това е вероятността Марийка да не получи бяла роза. Това включва случаите, когато тя избира само червени рози. Вече определихме, че това има вероятност 120 / 1140 = 1 / 9 = 0.1111 или около 11.11%.

P(X = 1) - това е вероятността Марийка да получи точно една бяла роза. Вече определихме, че това има вероятност 450 / 1140 = 5 / 12 ≈ 0.3947 или около 39.47%.

P(X = 2) - това е вероятността Марийка да получи точно две бели рози. Вече определихме, че това има вероятност 1000 / 1140 = 25 / 28 ≈ 0.8929 или около 89.29%.

P(X = 3) - това е вероятността Марийка да получи всичките три рози бели. Това е 10 / 1140 = 1 / 114 или около 0.0088%.

**Е)**

Функцията на разпределението F(x) на случайната величина X ни дава вероятността P(X ≤ x).

F(-1.5) - това е вероятността Марийка да получи 0 или по-малко бели рози. Тъй като няма отрицателен брой бели рози, вероятността е нула.

F(0.5) - това е вероятността Марийка да получи 0 или по-малко бели рози. Също като в предишния случай, вероятността е нула.

F(1.2) - това е вероятността Марийка да получи 1 или по-малко бели рози. Това включва вероятността за X = 0 и X = 1. Знаем, че P(X = 0) = 0.1111 и P(X = 1) = 0.3947. Така че F(1.2) = P(X ≤ 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.1111 + 0.3947 = 0.5058 или около 50.58%.

F(3.7) - това е вероятността Марийка да получи 3 или по-малко бели рози. Това включва вероятността за X = 0, X = 1, X = 2 и X = 3. Знаем, че P(X = 0) = 0.1111, P(X = 1) = 0.3947, P(X = 2) = 0.8929 и P(X = 3) = 0.0088. Така че F(3.7) = P(X ≤ 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.1111 + 0.3947 + 0.8929 + 0.0088 = 1 или 100%.

**Ж)**

За да намерим вероятностите P(X < 0), P(X = 0), P(X > 1), трябва да разгледаме стойностите, които може да приеме X.

X може да приеме стойности само от 0 до 3, както вече определихме в подточка Г.

P(X < 0) - тъй като X не може да бъде по-малко от 0 (не може да имаме отрицателен брой бели рози), тази вероятност е нула.

P(X = 0) - вече определихме, че P(X = 0) = 0.1111 или около 11.11%.

P(X > 1) - това е вероятността Марийка да получи повече от 1 бяла роза. Това включва стойностите X = 2 и X = 3. Знаем, че P(X = 2) = 0.8929 и P(X = 3) = 0.0088. Така че P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.8929 + 0.0088 = 0.9017 или около 90.17%.

Изпит ВПС - Първа част

**код - B5K7**

**ЗАДАЧИ:**

**Въпрос 1. (2 - 25WY)**

Кои от следните числа -2, 0, 0.5, 0.7, 1, 2 може да са дисперсия на сл.в. Х? Защо?

**Въпрос 2. (4 - 25WY)**  
Кои от следните числа -1, -0.5, 0, 0.5 и 10 могат да са стойности на функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина и защо?

**Въпрос 3. (1 - 25WY)**

По случаен начин избираме цифра измежду цифрите на твоето ЕГН (2). Нека събитията A=четна цифра и B=нечетна цифра. Независими ли са двете събития A и B? Защо (не се признава интуитивно доказателство)

**Въпрос 4. (5 - 25WY)**

Дискретна случайна величина X приема стойности само стойности 1, 2, 3, 4. Колко е P(X=1) ?

**Въпрос 5. (3 - 25WY)**

Може ли дискретна случайна величина да има безброй много стойности? Защо?

**Въпрос 6.**

Сл.в. X е нормално разпределена със средната стойност на 4 и стандартно отклонение 2. Колко % от стойностите на X са по-малки от 4 ?

**Задача 1.**

В кашон има топки за тенис, от тях 10+A са стари и 10 са нови, където А е 0. Иванчо бърка в кашона, изважда три топки и ги дава на Марийка.

А) Да се намери вероятността на събитието Марийка да е получила само една нова топка;

Б) Да се намери вероятността на събитието Марийка да е получила само две топки от един вид (две нови или две стари)  
 В) Да се намери вероятността на събитието Марийка да е получила поне две нови топки  
 Г) Нека X = брой нови топки, дадени на Марийка. Кои са стойностите на X ?

Д) Нека X = брой нови топки, дадени на Марийка. Да се напише разпределението на X ?

Е) Нека X = брой нови топки, дадени на Марийка. Да се намерят F(-1.5), F(0.5), F(1.2), F(3.7) където F(x) е функцията на разпределението на X ?

Ж) Да се намерят вероятностите P(X<0), P(X=0), P(X>1), където случайната величина X е дефинирана в т.д.

**РЕШЕНИЕ:**

**Въпрос 6.**

За да намерите процента на стойности на случайната променлива X, които са по-малки от 4, трябва да изчислите вероятността P(X < 4). Тъй като X е нормално разпределена, можете да използвате стандартното нормално разпределение за тази цел.

За да изчислите вероятността P(X < 4), трябва да нормализирате стойността на 4, използвайки формулата на Z-преобразуването:

Z = (X - μ) / σ,

където:

Z е стойността след нормализацията,

X е стойността на случайната променлива,

μ е средната стойност на случайната променлива,

σ е стандартното отклонение на случайната променлива.

В нашия случай:

X = 4,

μ = 4,

σ = 2.

Подставяме тези стойности в формулата:

Z = (4 - 4) / 2 = 0 / 2 = 0.

Сега трябва да намерим вероятността P(Z < 0), която можем да намерим от таблицата на стандартното нормално разпределение или използвайки калкулатор или софтуер за статистически пресмятания. От таблицата на стандартното нормално разпределение намираме, че P(Z < 0) е приблизително 0.5.

Така че, вероятността P(X < 4) е също приблизително 0.5 или 50%.

Следователно, около 50% от стойностите на X са по-малки от 4.

**Задача 1.**

**А)**

За да намерим вероятността на събитието Марийка да е получила само една нова топка, трябва да разгледаме всички възможни комбинации от топки, които Марийка може да получи и да изберем тези, в които има само една нова топка.

Общият брой на възможните комбинации е C(20, 3), тъй като имаме общо 20 топки (10 стари + 10 нови) и трябва да изберем 3 от тях. Това е комбинаторно число.

Броят на комбинациите, в които Марийка получава само една нова топка, е C(10, 1) \* C(10, 2), тъй като трябва да изберем 1 нова топка от наличните 10 и още 2 топки от старите 10.

Така получаваме вероятността:

P(Марийка получава само една нова топка) = (C(10, 1) \* C(10, 2)) / C(20, 3)

**Б)**

За да намерим вероятността на събитието Марийка да е получила само две топки от един вид (две нови или две стари), трябва да разгледаме всички възможни комбинации от топки, които Марийка може да получи и да изберем тези, в които има две топки от един вид и още една топка от друг вид.

Броят на комбинациите, в които Марийка получава две нови топки и една стара, е C(10, 2) \* C(10, 1), тъй като трябва да изберем 2 нови топки от наличните 10 и още 1 стара топка от наличните 10.

Броят на комбинациите, в които Марийка получава две стари топки и една нова, е C(10, 2) \* C(10, 1), тъй като трябва да изберем 2 стари топки от наличните 10 и още 1 нова топка от наличните 10.

Общият брой на възможните комбинации е C(20, 3), тъй като имаме общо 20 топки (10 стари + 10 нови) и трябва да изберем 3 от тях.

Така получаваме вероятността:

P(Марийка получава само две топки от един вид) = (C(10, 2) \* C(10, 1) + C(10, 2) \* C(10, 1)) / C(20, 3)

**В)**

За да намерим вероятността на събитието Марийка да е получила поне две нови топки, можем да сумираме вероятностите на събитията "Марийка получава две нови топки" и "Марийка получава три нови топки".

Така получаваме вероятността:

P(Марийка получава поне две нови топки) = P(Марийка получава само две топки от един вид) + P(Марийка получава само три нови топки)

**Г)**

Стойностите на X (броят на новите топки, дадени на Марийка) могат да бъдат 0, 1, 2 или 3, тъй като имаме общо 10 нови топки и Марийка може да получи най-много 3 топки.

**Д)**

Разпределението на X е дискретно разпределение, което може да се представи в таблица:

X | P(X)

------------

0 | ...

1 | ...

2 | ...

3 | ...

Тук трябва да допълните стойностите на P(X) за съответните стойности на X, като използвате вероятностите, изчислени в предишните въпроси.

**Е)**

За да намерите стойностите на F(x), използвайте разпределението на X, което сте съставили в предишния въпрос.

F(-1.5) е вероятността P(X ≤ -1.5), което е невъзможно, тъй като X не може да бъде по-малко от 0. Следователно F(-1.5) = 0.

F(0.5) е вероятността P(X ≤ 0.5). Понеже X може да приема само целочислени стойности, F(0.5) е вероятността P(X ≤ 0). Можете да я намерите като съберете вероятностите P(X = 0) и P(X = 1).

F(1.2) е вероятността P(X ≤ 1.2). Тъй като X може да приема само целочислени стойности, F(1.2) е вероятността P(X ≤ 1). Можете да я намерите като съберете вероятностите P(X = 0), P(X = 1) и P(X = 2).

F(3.7) е вероятността P(X ≤ 3.7). Понеже X може да приема стойностите 0, 1, 2 и 3, F(3.7) е равно на 1, тъй като всички стойности на X са по-малки или равни на 3.7.

**Ж)**

За да намерите вероятностите P(X < 0), P(X = 0) и P(X > 1), можете да използвате разпределението на X, което сте съставили в предишния въпрос.

P(X < 0) е вероятността, че X е по-малко от 0. Тъй като X не може да бъде по-малко от 0, P(X < 0) е равна на 0.

P(X = 0) е вероятността, че X е равно на 0. Можете да я намерите от разпределението на X.

P(X > 1) е вероятността, че X е по-голямо от 1. Тази вероятност можете да намерите като извадите P(X < 1) и P(X = 1) от 1.